$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln}\left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{Ln} x}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}{x}}_{0} = 0$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

3) – a) f est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[2, +\infty[$ sur $[\operatorname{Ln}2, +\infty[$

b) $(\mathcal{C}_f^{-1}) = S_D(\mathcal{C}_f)$

B $x \in [2, +\infty[$

$$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt$$

1) la fonction $\mathcal{U} : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0, 1]$ et

$\mathcal{U}(]0, 1]) = [2, +\infty[$

Comme f est continue sur $[2, +\infty[$ alors F est dérivable sur $]0, 1]$ et :

$F'(x) = \mathcal{U}'(x).f(\mathcal{U}(x))$

$$F'(x) = \frac{-2}{x^2} \operatorname{Ln}\left[\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2} - 4}\right]$$

$$F'(x) = \frac{-2}{x^2} \operatorname{Ln}\left[\frac{2}{x}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right]$$

2) a) $t \in [2, +\infty[$

$t + \sqrt{t^2 - 4} \geq t \Rightarrow \operatorname{Ln}(t + \sqrt{t^2 - 4}) \geq \operatorname{Ln} t$

$\Rightarrow f(t) \geq \operatorname{Ln} t$

b) $\int_2^{\frac{2}{x}} \operatorname{Ln} t\, dt = [t\operatorname{Ln} t - t]_2^{\frac{2}{x}}$

$$= \frac{2}{x}\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right] - [2\operatorname{Ln}2 - 2]$$

$$= \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) - 2(\operatorname{Ln}2 - 1)$$

c) pour $t \in [2, \frac{2}{x}]$ $f(t) \geq \operatorname{Ln} t$

$$\Rightarrow \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt \geq \int_2^{\frac{2}{x}} \operatorname{Ln} t\, dt$$

$$\rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) - 2(\operatorname{Ln}2 - 1)$$

$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right)$$

Car $-2(\operatorname{Ln}2 - 1) > 0$

d) pour $x \in]0, 1]$

$$F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) = +\infty$$

D'où $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$

3) $F'(x) < 0 ; \forall x \in]0, 1]$

x	0		1
$F'(x)$		-	
$F(x)$	$+\infty$	↘	0

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn